Exercice n°1.

Données pour l'exercice :

- Volume de la bille en acier : V = 0,52 cm^3
- Masse volumique de l'acier : ρ_A = 7850 kg/m^3
- Masse volumique de l'huile : ρ_H = 920 kg/m^3
- Accélération de la pesanteur au lieu de l'expérience : g = 9,8 m/s²

On réalise la chronophotographie de la chute d'une bille sphérique en acier dans l'huile. Pour ce faire, on filme la bille dans une éprouvette remplie d'huile, avec un caméscope numérique au rythme de 50 images par seconde. Grâce à un traitement adéquat des images, on obtient le document 1 (voir en fin de sujet). On repère ensuite la position, sur chaque image, du centre d'inertie de la bille : M_0 correspond à sa position initiale, celle-ci étant lâchée, à l'instant t_0 pris comme origine des dates, sans vitesse initiale.

A. Exploitation de l'enregistrement

A-1. En vous aidant des documents 1 et 2 (en fin de sujet), préciser les caractéristiques du mouvement de la bille entre les positions M_{15} et M_{21}. Quelle est la loi de Newton ainsi illustrée ?

A-2. A partir des conditions de prise de vue données ci-dessus, justifier les valeurs qui apparaissent dans la colonne temps **t (ms)** du tableau du document 2.

B. Étude cinématique

Le point M_0 étant pris comme origine des espaces et des temps (y = 0 et t = 0), on repère les différentes hauteurs réelles de chute de la bille dans l'huile, notées **y**, aux dates **t** correspondantes. On calcule alors les vitesses correspondantes. Les différentes grandeurs sont notées dans le tableau du document 2.

B-1. Calculer la vitesse de la bille pour la position M_6.

B-2. Calculer l'accélération de la bille pour la position M_{18}**.** Le résultat obtenu est-il compatible avec celui obtenu au A-1 ? Argumenter la réponse.

NB : *Pour les questions B-1 et B-2, on aura soin de préciser scrupuleusement la méthode employée pour déterminer les valeurs de la vitesse et de l'accélération aux points demandés.*

C. Étude dynamique

C-1. Sur un schéma, faire figurer, sans souci d'échelle, toutes les forces s'exerçant au centre d'inertie G de la bille tombant dans l'huile.

C-2. Calculer la masse m de la bille.

C-3. Donner l'expression littérale de la poussée d'Archimède, P_A, s'exerçant sur la bille plongée dans l'huile. Calculer sa valeur.

D. Équation différentielle du mouvement de la bille

Soit **f** l'intensité de la force de frottement à laquelle est soumise la bille en mouvement dans l'huile.

D-1. Par application du théorème du centre d'inertie que l'on énoncera, établir que le mouvement de la bille obéit à une équation différentielle du type : $\frac{dv_y}{dt} + \frac{f}{m} = A$, où A est une constante et v_y l'ordonnée la vitesse de la bille.

D-2. Donner l'expression littérale de A puis calculer sa valeur. Préciser son unité.

E. Recherche de modèles pour la force de frottement

On se propose de déterminer expérimentalement si l'intensité de la force de frottement **f** à laquelle est soumise la bille en mouvement dans l'huile est de la forme $\mathbf{f = k_1.v}$ ou $\mathbf{f = k_2.v^2}$, k_1 et k_2 étant des constantes et v la valeur de la vitesse de la bille.

On utilise un tableur pour représenter la vitesse de la bille en fonction du temps. On obtient le graphe du document 3 (en fin de sujet) : les points expérimentaux obtenus y sont représentés sous forme de losange. On détermine ainsi la valeur de la vitesse limite de chute de la bille : $v_{lim} = 0,95$ m/s.

E-1. Première hypothèse : $\mathbf{f = k_1 .v}$

E-1.a) Montrer que l'équation différentielle précédente peut alors se mettre sous la forme **:**

$\frac{dv_y}{dt} + B_1.v_y$ = A où A est la constante déterminée dans la partie D.

E-1.b) Lorsque la vitesse de la bille atteint la vitesse limite v_{lim}, que devient le terme $\frac{dv_y}{dt}$ de l'équation différentielle précédente ? En déduire l'expression littérale de B_1 en fonction de A et v_{lim}. Calculer alors la valeur de la constante k_1 et préciser son unité.

E-2. Deuxième hypothèse : $\mathbf{f = k_2 . v^2}$

Dans ce cas, l'équation différentielle se met sous la forme : $\frac{dv_y}{dt} + B_2.v_y^2 = A$

Déterminer l'expression littérale de B_2 en fonction de A et v_{lim}. Calculer alors la valeur de la constante k_2 et préciser son unité.

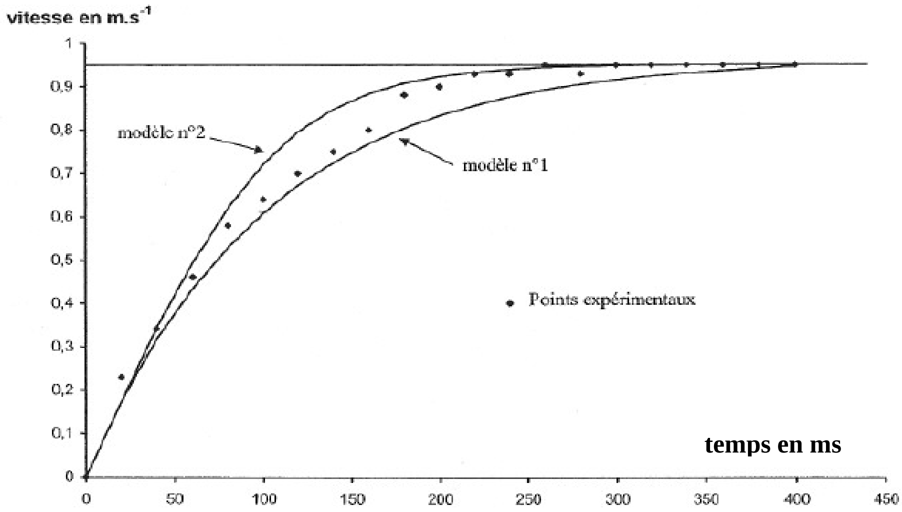
E-3. Comparaison des deux modèles précédents :

Grâce au tableur et à la méthode d'Euler, on détermine les courbes théoriques correspondant aux deux modèles précédents. Le premier modèle sera noté **« modèle n°1 »** sur le document 3 (en fin de sujet) correspond à l'hypothèse d'une force de frottement du type $\mathbf{f = k_1 . v}$. Le second modèle noté **« modèle n°2 »** correspond à l'hypothèse d'une force de frottement du type $\mathbf{f = k_2 .v^2}$.

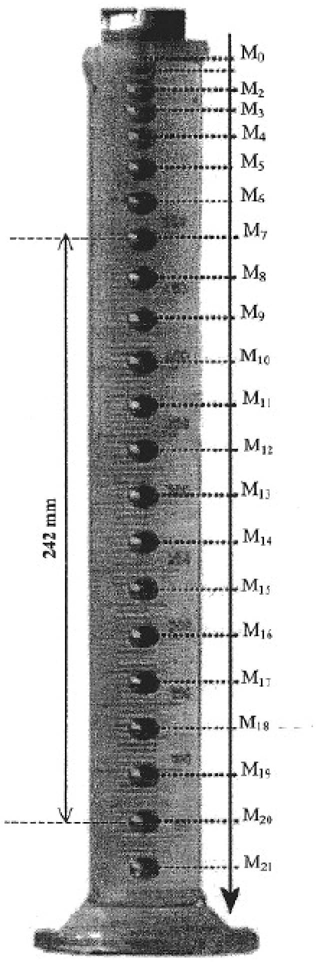
En vous aidant du document 3, préciser les domaines de vitesse, sous forme d'un encadrement, pour lesquels chacun des deux modèles précédents semble coïncider le mieux avec les points expérimentaux.

point	t(ms)	y(mm)	v_y(m/s)
M0	0	0,0	0,00
M1	20	4,5	0,23
M2	40	9,0	0,34
M3	60	18,0	0,46
M4	80	27,5	0,58
M5	100	41,0	0,64
M6	120	53,0	
M7	140	69,0	0,75
M8	160	83,0	0,80
M9	180	101,0	0,88
M10	200	118,0	0,90
M11	220	137,0	0,93
M12	240	155,0	0,93
M13	260	174,0	0,95
M14	280	193,0	0,93
M15	300	211,0	0,95
M16	320	231,0	0,95
M17	340	249,0	0,95
M18	360	269,0	0,95
M19	380	287,0	0,95
M20	400	307,0	0,95
M21	420	325,0	

Document 2 : tableau donnant la vitesse de la bille suivant sa position



Document 3 : *Courbes théoriques et points*



EXERCICE N°2 .

Dans les moteurs à combustion, on minimise les frottements entre les pièces mécaniques en utilisant des huiles afin d'obtenir un frottement visqueux. Plus une huile est épaisse, plus sa viscosité est élevée.

On souhaite déterminer expérimentalement la viscosité d'une huile moteur. Pour cela on filme la chute verticale d'une balle dans cette huile moteur avec une caméra numérique.

L'exploitation du film avec un ordinateur permet de déterminer les valeurs de vitesse de la balle en fonction du temps.

*On obtient le graphe donné dans l'**annexe 1 qui est À RENDRE AVEC LA COPIE**.*

1. Validité de la modélisation de la force de frottement

Pour étudier le mouvement de la balle, on se place dans le référentiel du laboratoire. On prendra l'axe vertical Oz dirigé vers le bas.

Les caractéristiques de la balle sont : masse m = 35,0 g ; rayon R = 2,00 cm ; volume V = 33,5 cm^3 .

La masse volumique de l'huile est ρ_{huile} = 0,910 g.cm^{-3} .

On suppose que la force de frottement s'exprime sous la forme $\vec{f} = -k\times\vec{v}_G$ où $\vec{v}_G$ est la vitesse du centre d'inertie de la balle. On appellera v_{Gz} la composante de la vitesse suivant l'axe Oz.

1.1. Faire l'inventaire des forces extérieures appliquées à la balle en chute libre verticale dans l'huile, puis les représenter sur un schéma.

1.2. En appliquant la deuxième loi de Newton, établir l'équation différentielle du mouvement de la balle dans le référentiel du laboratoire.

1.3. Montrer que $\dfrac{dv_{G_z}}{dt}$ peut se mettre sous la forme : $\dfrac{dv_{G_z}}{dt} = A - B\times v_G$ avec $A = g\times(1 - \dfrac{\rho_{huile}\times V}{m})$ et $B = \dfrac{k}{m}$.

1.4. Vérifier que la constante A = 1,27 S.I. en précisant son unité. On donne la valeur du champ de pesanteur g = 9,81 m.s^{-2} .

1.5. *Le mouvement de chute de la balle présente deux régimes visibles sur la représentation graphique* $v_{Gz} = f(t)$ *donnée en **annexe 1**.*

> **1.5.1.** Séparer, sur le graphe en **annexe 1**, par un axe vertical les domaines des deux régimes. On précisera le domaine du régime permanent et le domaine du régime transitoire du mouvement de la balle.
>
> **1.5.2**. Relever la valeur de la vitesse limite v_{lim} sur la représentation graphique $v_{Gz} = f(t)$.
>
> **1.5.3.** Que vaut l'accélération de la balle quand celle-ci atteint la vitesse limite ?

1.6. *Connaissant la constante A donnée en 1.4. et la constante B = 7,5 s^{-1}, la méthode d'Euler permet d'estimer par le calcul la valeur de la vitesse de la balle en fonction du temps en utilisant les deux relations :*

$$\frac{dv_{Gz}(t_i)}{dt} = A - B\times v_{Gz}(t_i) \quad v_{Gz}(t_{i+1}) = v_G(t_i) + \frac{dv_{Gz}(t_i)}{dt}\times\Delta t$$ *où Δt est le pas d'itération.*

Nous obtenons le tableau de valeurs suivant :

t (s)	0	0,080	0,16	0,24	0,32	0,40	0,48	0,56
$\dfrac{dv_{Gz}}{dt}$ (m.s^{-2})	?	0,51	0,20	?	0,03	0,02	0,00	0,00
v_{Gz} (m.s^{-1})	0	0,102	0,143	?	0,165	0,167	0,169	0,169

1.6.1. Quel est le pas d'itération de la méthode d'Euler proposée ?

1.6.2. Que vaut l'accélération à l'instant t = 0 s ?

En utilisant la méthode d'Euler :

1.6.3. Calculer la valeur de la vitesse à l'instant t = 0,24 s.

1.6.4. En déduire la valeur de l'accélération à l'instant t = 0,24 s.

1.7. Placer sur la représentation $v_{Gz} = f(t)$ de l'**annexe 1** les valeurs des vitesses obtenues par la méthode d'Euler et tracer la courbe passant par ces points.

1.8. Sur quel paramètre peut-on agir pour améliorer la résolution de l'équation différentielle par la méthode d'Euler ?

En comparant la courbe obtenue par la méthode d'Euler et les points expérimentaux, la modélisation de la force de frottement de l'huile sur la balle $\vec{f} = - k \times \vec{v}_G$ est-elle valide ? Justifier votre réponse.

2. Détermination de la viscosité de l'huile moteur

Pour des vitesses faibles, la formule de Stokes permet de modéliser la force de frottement fluide $\vec{f}$ agissant sur un corps sphérique en fonction de la viscosité η de l'huile, du rayon de la balle R et de la vitesse de déplacement $\vec{v}_G$ de la balle telle que :

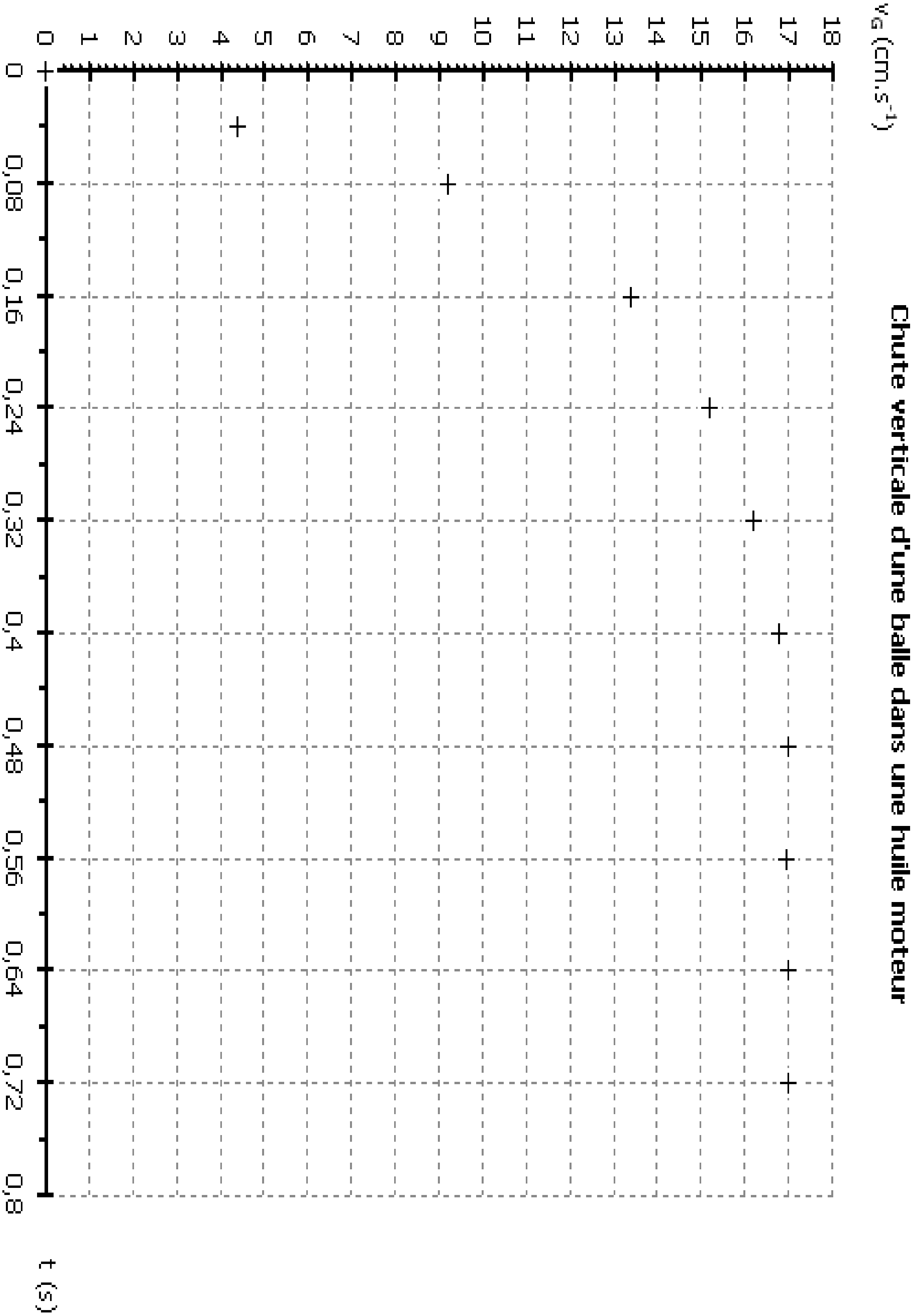
$$\vec{f} = - 6\, \pi\, \eta\, R\, \vec{v}_G \qquad \text{avec } \eta \text{ en Pa.s, R en m et } v_G \text{ en m.s}^{-1}.$$

2.1. En vous aidant de l'expression de B donnée à la question 1.3 et de l'hypothèse $\vec{f} = - k \times \vec{v}_G$, exprimer la viscosité η en fonction de B, m et R.

2.2. Calculer la viscosité η de l'huile étudiée.

2.3.À l'aide des valeurs de viscosité données ci-dessous, identifier l'huile de moteur étudiée.

	Huile moteur à 20°C		
	SAE 10	SAE 30	SAE 50
η (Pa.s)	0,088	0,290	0,700


Chute verticale d'une balle dans une huile moteur
vG (cm.s-1)
t (s)